Corrigé

a) Considérons la fonction continue $f : \left(\begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\cos(x) \end{array}\right)$, et montrons que f est surjective.

On a $f(2n\pi) = 2n\pi$ et $f((2n+1)\pi) = -(2n+1)\pi$ donc par le théorème des valeurs intermédiaires on peut affirmer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$[-(2n+1)\pi, 2n\pi] \subset f([0,+\infty[)$$

et ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R} \subset f([0,+\infty[)$.

b) Raisonnons par l'absurde en supposant que f ne s'annule qu'un nombre fini de fois. Il existe alors $A \geqslant 0$ tel que pour tout $\geqslant A$, $f(x) \neq 0$. Par continuité on peut affirmer que f garde un signe constant sur $[A,+\infty[$, et quitte à considérer la fonction $-f$ on peut supposer que pour tout $x \geqslant A$, $f(x) > 0$.

Mais f est continue donc bornée sur le segment $[0, A]$ donc en posant $[m, M] = f([0, A])$ on a pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant \min(m, 0) = \alpha$.

Ainsi, $f([0,+\infty[) \subset [\alpha,+\infty[$, ce qui est absurde.