Corrigé

On a $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$ donc, en posant $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ on a

$$u_n = \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - r_n\right)\right) = \ln\left(\frac{1-\tan r_n}{1+\tan r_n}\right) = \ln(1-\tan r_n) - \ln(1+\tan r_n).$$

Sachant que $\lim r_n = 0$ on a $\tan r_n = r_n + O(r_n^3)$ et $\ln(1-x) - \ln(1+x) \underset{0}{=} -2x + O(x^3)$ donc $u_n = -2r_n + O(r_n^3)$.

D'après le critère spécial, $|r_n| \leqslant \frac{1}{2n+3}$ donc $r_n^3 = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Il en résulte que la série $\sum (u_n + 2r_n)$ converge et donc que les série $\sum u_n$ et $\sum r_n$ sont de même nature.

La série $\sum r_n$ est alternée car r_n est de même signe que son premier terme $\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$. De plus,

$$\begin{aligned}|r_{n+1}| - |r_n| &= (-1)^{n+2} r_{n+1} - (-1)^{n+1} r_n = (-1)^n \left(\sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right) \\ &= (-1)^n \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+3} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right) = (-1)^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2(-1)^k}{(2k+1)(2k+3)}.\end{aligned}$$

Le critère spécial permet maintenant d'affirmer que $|r_n| - |r_{n+1}|$ est du signe de $\frac{2(-1)^{2n+1}}{(2n+3)(2n+5)} < 0$ donc que la suite $|r_n|$ décroit.

Enfin, la suite (r_n) tend vers 0 donc le critère spécial permet de conclure : la série $\sum r_n$ (et donc $\sum u_n$) converge.