Corrigé

Pour $x\in]-1,1[$ on a $\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}=\left(\sum_{p=0}^{+\infty}x^p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty}x^{2q}\right)\left(\sum_{r=0}^{+\infty}x^{3r}\right)$, la convergence de ces trois séries étant absolue.
Le produit de Cauchy des deux premières séries donne :

$$\forall x\in]-1,1[,\quad \left(\sum_{p=0}^{+\infty}x^p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty}x^{2q}\right)=\sum_{s=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+2q=s}x^{p+2q}\right).$$

La convergence de cette dernière série est toujours absolue, ce qui nous autorise à réaliser de nouveau un produit de Cauchy :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{s+3r=n}\left(\sum_{p+2q=s}x^{p+2q}\right)x^{3r}\right)\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+2q+3r=n}x^{p+2q+3r}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}f_nx^n.\end{aligned}$$