Corrigé

On a $\dfrac{u_{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{u_n}{n!} - \dfrac{n+2}{(n+1)!}$ donc par télescopage $\dfrac{u_n}{n!} = \dfrac{u_0}{0!} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{k+2}{(k+1)!}$.

On a donc $u_n = n!\left(u_0 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\dfrac{1}{k!} + \dfrac{1}{(k+1)!}\right)\right) = n!\left(u_0 + 1 - \dfrac{1}{n!} - 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{k!}\right)$.

Ainsi, $u_n = -1 + n!\left(u_0 + 1 - 2\,\mathrm{e} + 2\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \dfrac{1}{k!}\right)$.

Le terme entre parenthèses converge vers $u_0 + 1 - 2\,\mathrm{e}$ donc si $u_0 \neq 2\,\mathrm{e} - 1$ la suite (u_n) diverge (vers $\pm\infty$) et n'est donc pas bornée.

Si $u_0 = 2\,\mathrm{e} - 1$ alors $u_n = -1 + 2n!\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \dfrac{1}{k!}$. Or pour tout $k \geqslant n+2$, $\dfrac{1}{k!} \leqslant \dfrac{1}{k(k-1)n!}$

donc $1 \leqslant n!\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \dfrac{1}{k!} \leqslant 1 + \dfrac{1}{n+1} + \displaystyle\sum_{k=n+2}^{+\infty} \dfrac{1}{k(k-1)} = 1 + \dfrac{2}{n+1}$.

Ceci prouve que $\lim u_n = 1$ donc que la suite (u_n) est bornée.