Corrigé

a) Supposons que u admette trois valeurs propres distinctes α_1, α_2 et α_3. Considérons trois vecteurs propres associés respectivement à chacune de ces trois valeurs propres : $u(x_i) = \alpha_i x_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$. La famille (x_1, x_2, x_3) est libre. Posons $x = x_1 + x_2 + x_3$ et appliquons-lui l'hypothèse : $u^2(x) = \lambda_x u(x) + \mu_x x$. Mais $u(x) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$ et $u^2(x) = \alpha_1^2 x_1 + \alpha_2^2 x_2 + \alpha_3^2 x_3$ et compte tenu de la liberté de la famille (x_1, x_2, x_3) on en déduit :

$$\begin{cases} \alpha_1^2 = \lambda_x \alpha_1 + \mu_x \\ \alpha_2^2 = \lambda_x \alpha_2 + \mu_x \\ \alpha_3^2 = \lambda_x \alpha_3 + \mu_x \end{cases}$$

En soustrayant la seconde équation à la première, et sachant que $\alpha_1 \neq \alpha_2$ on en déduit que $\lambda_x = \alpha_1 + \alpha_2$. De la même manière, en soustrayant la troisième équation à la première on déduit que $\lambda_x = \alpha_1 + \alpha_3$. Mais alors $\alpha_2 = \alpha_3$, ce qui est absurde. Ainsi, u possède au plus deux valeurs propres distinctes.

b) Si $x = 0_{\mathrm{E}}$ n'importe quelles valeurs de λ_0 et μ_0 conviennent.

Si x est vecteur propre pour la valeur propre α, la condition revient à écrire $\alpha^2 = \lambda_x \alpha + \mu_x$ donc λ_x est quelconque et $\mu_x = \alpha^2 - \lambda_x \alpha$.

Si x n'est pas vecteur propre de u, la famille $(x, u(x))$ est libre donc engendre un plan H, stable par u puisque $u^2(x) \in \mathrm{Vect}(x, u(x))$. Dans la base $(b) = (x, u(x))$, $\mathrm{Mat}_{(b)}(u_{\mathrm{H}}) = \begin{pmatrix} 0 & \mu_x \\ 1 & \lambda_x \end{pmatrix}$ et $\chi_{u_{\mathrm{H}}}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2 - \lambda_x \mathrm{X} - \mu_x$. Cependant, toute valeur propre de u_{H} est valeur propre de u donc $\chi_{u_{\mathrm{H}}}$ ne peut admettre que α pour racine. Puisque le corps de base est $\mathbb{C}$ la seule possibilité est que $\chi_{u_{\mathrm{H}}}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} - \alpha)^2$, ce qui impose $\lambda_x = 2\alpha$ et $\mu_x = -\alpha^2$.