Corrigé

$\operatorname{rg} M = 1$ donc 0 est valeur propre d'ordre $n-1$ de M. De plus, $\operatorname{tr} M = n$ donc $\operatorname{Sp}(M) = \{0, n\}$ et M est diagonalisable, semblable à la matrice D dont tous les coefficients sont nuls hormis celui situé en position $(1,1)$, égal à n.

Posons $M = PDP^{-1}$ avec $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, et $A = PBP^{-1}$. Alors $A^3 = M \iff B^3 = D$ et $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$ donc il s'agit de montrer que $(\operatorname{tr} B)^3 = n$.

On a $BD = B^4 = DB$ donc B commute avec D. Or il est facile de constater que les matrices qui commutent avec D sont de la forme $B = \left(\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & C & \\ 0 & & & \end{array}\right)$.

Ainsi, $B^3 = D$ si et seulement si $x^3 = n$ et $C^3 = 0$. La matrice C est nilpotente donc sa seule valeur propre est 0, avec pour conséquence $\operatorname{tr} C = 0$. On a donc $\operatorname{tr} B = x$ avec $x^3 = n$, soit $(\operatorname{tr} B)^3 = n$.