Corrigé

Notons déjà que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $u^n(e_k) = 0$ donc $u^n = 0$.
Considérons H, sous-espace de $\mathbb{R}^n$ stable par u, et notons $v = u_{\mathrm{H}} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ la restriction de u à H.

- Si $v = 0$ alors $\mathrm{H} \subset \operatorname{Ker} u$. Mais $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}(e_n)$ donc $\mathrm{H} = \{0\}$ ou $\mathrm{H} = \operatorname{Vect}(e_n)$.
- Si $v \neq 0$ on a $v^n = 0$ donc on peut définir son indice de nilpotence, à savoir le plus petit entier $k \in [\![1, n]\!]$ vérifiant $v^{k-1} \neq 0$ et $v^k = 0$.
  On a $\mathrm{H} \subset \operatorname{Ker} u^k = \operatorname{Vect}(e_{n-k+1}, \ldots, e_n)$ donc $\dim \mathrm{H} \leqslant k$. Mais si on choisit $x \in \mathrm{H}$ tel que $v^{k-1}(x) \neq 0$ un résultat classique montre que la famille $(x, v(x), \ldots, v^{k-1}(x))$ est libre donc que $\dim \mathrm{H} \geqslant k$. En définitive on a donc $\dim \mathrm{H} = k$ et $\mathrm{H} = \operatorname{Vect}(e_{n-k+1}, \ldots, e_n)$.

En conclusion, les sous-espaces stables sont les sous-espaces $\{0\}$ et $\operatorname{Vect}(e_p, \ldots, e_n)$ avec $p \in [\![1, n]\!]$.