Corrigé

a) On vérifie sans peine que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

b) Si $\det \mathrm{A} = ad - bc$ appartient à $\{-1, 1\}$, la formule précédente montre que A^{-1} est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Réciproquement, si A et A^{-1} sont à coefficients dans $\mathbb{Z}$, $\det \mathrm{A}$ et $\det \mathrm{A}^{-1}$ sont des entiers relatifs, et $(\det \mathrm{A})(\det \mathrm{A}^{-1}) = \det \mathrm{I}_2 = 1$ donc $\det \mathrm{A} = \det \mathrm{A}^{-1} = \pm 1$.

c) Considérons l'application $\phi : t \mapsto \det(\mathrm{A} + t\mathrm{B})$. S'agissant de matrices 2×2, il est évident que cette application est une application polynomiale de degré inférieur ou égal à 2 et à coefficients entiers.

D'après la question précédente nous savons que $\phi(0)$, $\phi(1)$, $\phi(2)$, $\phi(3)$, $\phi(4)$ appartiennent à $\{-1, 1\}$ et il faut montrer qu'il en est de même de $\phi(5)$.

Or parmi ces cinq valeurs il y en a forcément trois qui sont égales et d'après le principe d'interpolation tout polynôme de degré inférieur ou égal à 2 qui prend trois fois la même valeur est constant. ϕ est donc constant égal à ± 1 et on a bien $\phi(5) \in \{-1, 1\}$ (ainsi que $\phi(k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$).