Corrigé

Puisque $\deg P' = \deg P - 1$ il existe $a \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $P(X) = a(X-\lambda)P'(X)$.
Notons n l'ordre de multiplicité de λ vu comme racine de P.
On a $P(X) = (X-\lambda)^n Q(X)$ avec $Q(\lambda) \neq 0$, et

$$P'(X) = n(X-\lambda)^{n-1}Q(X) + (X-\lambda)^n Q'(X).$$

En reportant dans l'égalité on obtient : $Q(X) = anQ(X) + an(X-\lambda)Q'(X)$ et donc $Q(\lambda) = anQ(\lambda)$. Puisque $Q(\lambda) \neq 0$ on en déduit $a = 1/n$.
Mais alors $(X-\lambda)Q'(X) = 0$, ce qui impose $Q' = 0$. Le polynôme Q est donc constant, et en posant $Q = \alpha$ on obtient $P(X) = \alpha(X-\lambda)^n$.
Réciproquement, il est évident que les polynômes de la forme $\alpha(X-\lambda)^n$ avec $\alpha \neq 0$ et $n \geqslant 1$ sont solutions.